PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

x étant une variable réelle et y une fonction réelle de x , on considère l'équation différentielle ı deuxième ordre :

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \qquad (E)$$

1°) Rechercher une solution de (E) sous la forme $y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ .

2°) Identifier la somme de la série entière trouvée en 1°) (en distinguant si besoin est les cas $x\geq 0$ et $x\leq 0$) .

3°) $y_0$ désignant la solution de 2°) qui vérifie $y(0) = 1$ , chercher les fonctions continues sur IR, solutions de $(S_2)$ sur $\mathbb{R}^*$ de la forme $y = y_0 z$ .

4°) Former l'équation différentielle (E') déduite de (E) en posant :
$x = \varepsilon t^2$ avec $t\geq 0$ , $\varepsilon = 1$ si $x>0$ , $\varepsilon = -1$ si $x<0$ et $z(t) = y(x(t))$ .
Déterminer les solutions de (E') et retrouver le résultat de I. 3°) .

**I.** On rappelle que si $U = (u_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ est une matrice réelle à p lignes et n colonnes, $\|U\| = \max_{1\leq i\leq p}\left(\sum_{1\leq j\leq n}|u_{i,j}|\right)$ est une norme et que si V est une matrice à n lignes et q colonnes : $\|UV\| \leq \|U\|\,\|V\|$ .

Les normes utilisées dans la suite ne sont pas spécifiées mais elles sont supposées avoir cette ɔropriété.

On va étudier dans cette partie l'existence d'une solution développable en série entière pour un ;ystème différentiel linéaire du premier ordre s'écrivant :

$$Y' = A(x)Y \qquad (S_1) \qquad \text{où la transposée de } Y \text{ est } {}^tY = (y_1(x),\ldots,y_n(x))$$

et $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice possédant un développement en série entière

---

$A(x)=\sum_{k\geq 0}A_k x^k$ de rayon de convergence R>0 . (Les coefficients $A_k$ sont des matrices constantes et $\left\|A(x)-\sum_{0\leq k\leq p}A_k x^k\right\|\to 0$ pour $|x|<R$).

1°) Vérifier que si $(S_1)$ possède une solution $Y(x)=\sum_{k\geq 0}C_k x^k$ avec des vecteurs $C$ $IR^n$ constants, ceux-ci sont liés par les relations :

$$(k+1)C_{k+1}=\sum_{0\leq j\leq k}A_{k-j}C_j \qquad \text{pour } k\geq 0 .$$

2°) Justifier l'existence pour r tel que 0<r<R , d'une constante M>0 telle que :

$$\left\|A_k r^k\right\|\leq M \qquad \text{pour } k\geq 0 .$$

En déduire que $(k+1)\left\|C_{k+1}\right\|\leq \sum_{0\leq j\leq k}\frac{M}{r^{k-j}}\left\|C_j\right\|$ pour k≥0 .

3°) Montrer que si K est une constante >0 , la suite réelle $(u_k)_{k\geq 0}$ définie par :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_k=\frac{K(K+1)\ldots(K+k-1)}{k!} \qquad \text{pour } k\geq 1$$

vérifie $(k+1)u_{k+1}=K\sum_{0\leq j\leq k}u_j$ . (On pourra utiliser les développements en série entière $g_K(t)=\frac{1}{(1-t)^K}$ et de $g_K'(t)$) .

4°) Montrer que la suite $(v_j)_{j\geq 0}$ définie par $v_j=\left\|C_j\right\|r^j$ vérifie $(k+1)v_{k+1}\leq Mr\sum_{0\leq j\leq k}v_j$ .

En déduire que $v_k\leq \frac{Mr(Mr+1)\ldots(Mr+k-1)}{k!}v_0$ pour k≥1 .

5°) Montrer que la série $\sum_{k\geq 0}C_k x^k$ converge normalement pour $|x|\leq r'$ où $0<r'<r$ et donr une majoration de $\left\|\sum_{k\geq 0}C_k x^k\right\|$ faisant intervenir $C_0$ et $g_K$ avec $K=Mr$ .

6°) Montrer que pour toute condition initiale donnée, le système $(S_1)$ a une seule solut développable en série entière.

Que peut-on dire du rayon de convergence de cette série entière ?

On va montrer dans la partie suivante qu'avec une matrice A(x) de la forme $\frac{1}{x}B(x)$ où B(x un développement en série entière de rayon de convergence R>0 , on peut encore obtenir u solution Y(x) développable en série entière ou, à tout le moins, une solution de la forı

$Y(x) = |x|^{\mu} Z(x)$ où Z est développable en série entière.

**III.** Soit le système différentiel :

$$Y' = \frac{1}{x} B(x) Y \qquad (S_2)$$

où B(x) est une matrice carrée d'ordre n ayant un développement en série entière $B(x) = \sum_{k \geq 0} B_k x^k$ de rayon de convergence R>0 .

1°) Vérifier que l'équation (E) traitée en **I.** conduit à un système $(S_2)$ en posant $y_1 = y$ et $y_2 = xy'$.
Préciser la matrice B(x) correspondante, son développement en série entière et le rayon de convergence de ce développement.

2°) a) Écrire les relations vérifiées par les vecteurs constants $C_k$ si $Y = \sum_{k \geq 0} C_k x^k$ est solution de $(S_2)$ .

b) Montrer que si 0 est la seule valeur propre entière ≥0 de $B_0$ , on peut, sous réserve de convergence, disposer d'une solution Y de $(S_2)$ développable en série entière.

c) Examiner le cas où 0 n'est pas valeur propre de $B_0$ et où $B_0$ possède une valeur propre qui est un entier ≥1 .

3°) Étudier le système $(S_2)$ écrit en 1°) et retrouver le résultat de **I.** 1°) .

4°) Si $B_0$ n'a pas toutes ses valeurs propres entières ≥0 , soit $\mu$ une valeur propre de $B_0$ qui n'est pas un entier ≥0 .

a) Former le système différentiel $(S_2')$ vérifié sur $\mathbb{R}^*$ par Z tel que $Y = |x|^{\mu} Z$ .

b) Chercher une solution de $(S_2')$ sous la forme $Z = \sum_{k \geq 0} C_k x^k$ et constater que si pour aucun entier k≥1 , $\mu + k$ n'est valeur propre de $B_0$ , on peut, sous réserve de convergence, disposer d'une fonction Y continue sur R , solution de $(S_2)$ sur $\mathbb{R}^*$ de la forme $Y = |x|^{\mu} Z$ avec Z développable en série entière.

5°) Appliquer la procédure de 4°) au système $(S_2)$ écrit en 1°) et retrouver les résultats de **I.** 3°) ou **I.** 4°) .

6°) On se place dans le cas d'une valeur propre $\mu$ (entière ou non) de $B_0$ telle que pour aucun entier k≥1 , $\mu + k$ ne soit valeur propre.